

Cours 4 : Preuve du thm 3.1
Dépendance aux paramètres

celle condition
va permettre à la
solution de
sortir de $\bar{D}_k$

Preuve du thm 3.1 : Pour $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$D_k := \left\{ (t, x) \in D ; |t - t_0| < k, |x - x_0| < k, d((t, x), \partial D) > \frac{1}{k} \right\}.$$

$$\text{On a alors : } \bar{D}_k \subset D_{k+1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D.$$

Si $(\bar{t}, \bar{x}) \in D$, soit $r := |\bar{t} - t_0| + |\bar{x} - x_0|$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $r < k$, d'où $|\bar{t} - t_0| < k$ et $|\bar{x} - x_0| < k$. Comme D est ouvert, il existe r_1 t.q. $B_{r_1}(\bar{t}, \bar{x}) \subset D$. Il suffit alors de choisir k assez grand pour que $d((\bar{t}, \bar{x}), \partial D) \geq r_1 > \frac{1}{k}$, d'où $(\bar{t}, \bar{x}) \in D_k$.

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ posons } \delta_k := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2k(k+1)}.$$

Soit $(t^*, x^*) \in D_k$. On a alors

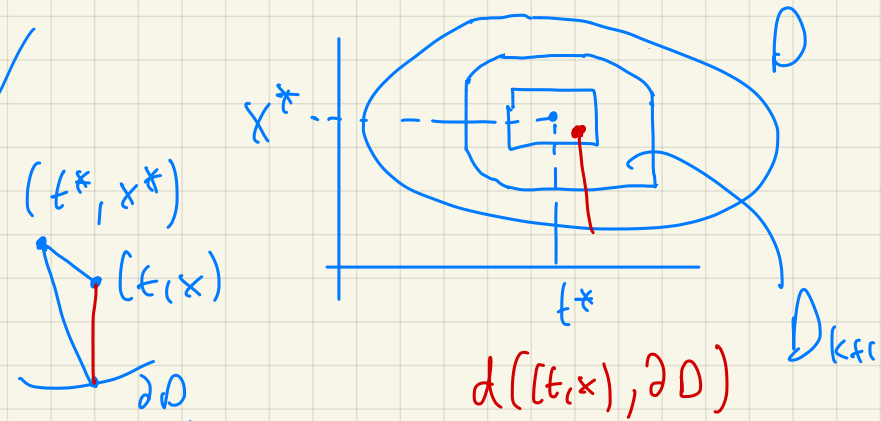
$$G_k := \{ (t, x) \in D ; |t - t^*| \leq \delta_k, |x - x^*| \leq \delta_k \} \subset D_{k+1}.$$

$$(t, x) \in G_k \Rightarrow |t - t_0| \leq |t - t^*| + |t^* - t_0| < \delta_k + k < k+1$$

$$\text{et } |x - x_0| \leq |x - x^*| + |x^* - x_0| < \delta_k + k < k+1$$

$$\text{car } \delta_k = \frac{k+1-k}{2k(k+1)} = \frac{1}{2k(k+1)} < 1 \checkmark$$

$$d((t^*, x^*), \partial D) \leq d((t^*, x^*), (t, x)) + d((t, x), \partial D)$$



$$d((t, x), \partial D) \geq d((t^*, x^*), \partial D) - d((t^*, x^*), (t, x)) > \frac{1}{k} - 2\delta_k = \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Soit } M_k := \max \{ |f(t, x)| ; (t, x) \in \overline{D_{k+1}} \},$$

$$\gamma_k := \min \{ \delta_k, \delta_k / M_k \}.$$

La version du lemme 2-2 sans l'hypothèse

que f est localement lipschitzienne donne
l'existence d'une solution de

$$x' = f(t, x), \quad x(t^*) = x^*,$$

pour $|t - t^*| \leq \gamma_k$. Ainsi, notre solution ϕ de
donnée $(t_0, x_0) \in D_k$ peut être prolongée

de $[a_{m-1}, b_{m-1}]$ à $[a_m, b_m]$ avec

$$|a_m - a_{m-1}| \geq \gamma_k \text{ et } |b_m - b_{m-1}| \geq \gamma_k$$

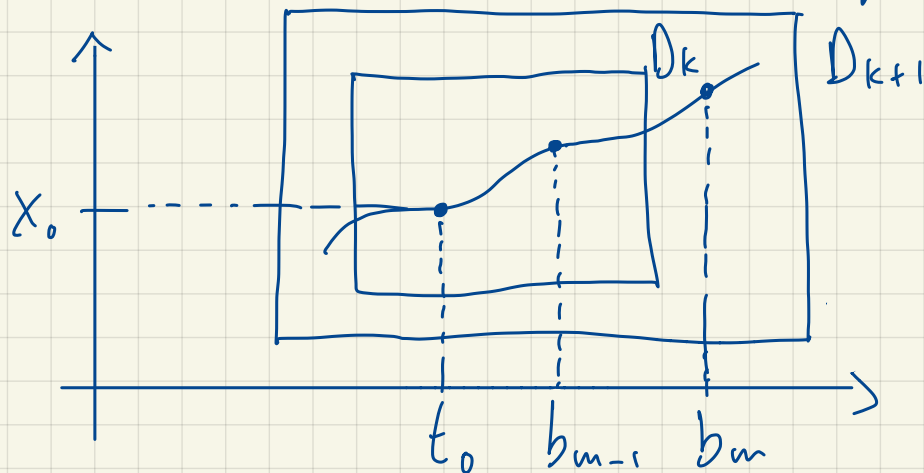
tant que $(a_{m-1}, \phi(a_{m-1})) \in D_k$ (resp. $(b_{m-1}, \phi(b_{m-1})) \in D_k$).

prendre ci-dessus

$$(t^*, x^*) = (a_{m-1}, \phi(a_{m-1}))$$

ou

$$(t^*, x^*) = (b_{m-1}, \phi(b_{m-1}))$$



Pour simplifier la discussion, nous nous restreignons dès maintenant aux prolongements à droite.

Puis que $\bar{D}_k$ est compact, en un nombre fini de prolongement de taille $\geq \gamma_k$ le point $(b_m, \phi(b_m))$ va sortir de $\bar{D}_k$. Soit m_k le premier entier m t.q. $(b_m, \phi(b_m)) \notin \bar{D}_k$.

On construit ainsi une suite $\{(b_{m_k}, \phi(b_{m_k}))\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$ telle que $(b_{m_k}, \phi(b_{m_k})) \notin \bar{D}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Posons $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{m_k}$. Par construction, notre solution se prolonge bien en une solution de (PC) sur $[t_0, \beta)$. Il reste à prouver que $(t, \phi(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \beta^-} \partial D$.

Supposons par l'absurde que c'est faux: il existe un compact $K \subset D$ et une suite $t_j \nearrow \beta^-$ t.q.

$(t_j, \phi(t_j)) \in K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{(t_j, \phi(t_j))\}_{j \in \mathbb{N}}$ possède un point d'accumulation dans K . En considérant maintenant les

prolongements successifs $[t_0, t_{j-1}] \rightsquigarrow [t_0, t_j]$, on déduit du lemme 3.1 que $\phi(t_j) \rightarrow \phi(\beta)$ ($j \rightarrow \infty$).

Mainstream, $K \subset \overline{D}_{k_0}$ pour un $k_0 \in \mathbb{N}$, d'où $(\beta, \phi(\beta)) \in \overline{D}_{k_0}$, ce qui contredit le fait que

$(\underbrace{b_{m_{k_0}}}_{< \beta}, \phi(b_{m_{k_0}})) \notin \overline{D}_{k_0}$. Ainsi, on a bien

$$(4.1) \quad (t, \phi(t)) \longrightarrow \partial D \quad (t \rightarrow \beta^-).$$

Une discussion similaire montre que ϕ peut être prolongée à gauche sur un intervalle $(\alpha, t_0]$ t.q.

$$(4.2) \quad (t, \phi(t)) \longrightarrow \partial D \quad (t \rightarrow \alpha^+).$$

Par (4.1) et (4.2), il est clair que (α, β) est l'intervalle d'existence maximal de ϕ .

Finalement, si f est loc. lip. en x , chacun des prolongements ci-dessus est unique, d'où l'unicité du prolongement sur (α, β) . #

Dépendance aux paramètres

Dans la plupart des situations où les EDO sont utilisées pour modéliser des phénomènes, celles-ci dépendent de un ou plusieurs paramètres du modèle.

Considérons le problème de Cauchy suivant, dépendant du paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$:

$$(PC[\mu]) \quad \begin{cases} x' = f(t, x; \mu), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Théorème 4.1 : Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f \in C^0(D, \mathbb{R}^d)$ une fonction localement lipschit-

zienne par rapport $x \in \mathbb{R}^d$ dans le sens suivant :
 pour tout $(\underline{t}, \underline{x}; \underline{\mu}) \in D$, il existe un voisinage $\underline{V}$
 de $(\underline{t}, \underline{x}; \underline{\mu})$ dans D et une constante $\underline{k} > 0$ t.q.
 f est $\underline{k}$ -lipschitzienne en x sur $\underline{V}$, uniformé-
 ment p.r. à $(t; \mu)$. Soit $(t_0, x_0; \mu_0) \in D$.
 Alors il existe des constantes $\gamma, c > 0$ telles que
 $(PC[\mu])$ possède une unique solution $x(t; \mu)$
 continue sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma] \times [\mu_0 - c, \mu_0 + c]$.

Preuve: Il suffit d'adapter la preuve du Lem 2.1

avec $G = \{(t, x, \mu); |t - t_0| \leq \gamma, |x - x_0| \leq b, |\mu - \mu_0| \leq c\}$
 $\gamma = \min\{a, b/M\}$, $M = \max\{|f(t, x; \mu)|; (t, x, \mu) \in G\}$

et le schéma itératif

$$X_0(t; \mu) \equiv X_0,$$

$$X_{m+1}(t; \mu) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X_m(s); \mu) ds, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad \#$$

Remarque 2.1: L'hypothèse que f est localement lipschitzienne en x peut être omise. La conclusion que $x(t; \mu)$ est continue en $(t; \mu)$ reste vraie tant que la solution de $(PC[\mu])$ est unique.

Il est aussi important de considérer la dépendance de la solution par rapport aux données initiales.

Considérons donc le problème de Cauchy

$$(PC[t_0, x_0, \mu]) \quad \begin{cases} x' = f(t, x; \mu), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

comme dépendant des paramètres $(t_0, x_0, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Théorème 4.2: Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$. Supposons que $(PC[t_0, x_0, \mu])$ a une unique solution $x = x(t; t_0, x_0, \mu)$. Alors cette solution est continue en $(t; t_0, x_0, \mu)$ sur son domaine de définition.

Preuve: Soit $s = t - t_0$ et $y(s) = x(t) - x_0$.

Ce changement de variables transforme $(PC[t_0, x_0, \mu])$
dans le problème de Cauchy

$$(PC^*[t_0, x_0, \mu]) \quad \frac{dy}{ds} = g(s, y; t_0, x_0, \mu), \quad y(0) = 0,$$
$$g(s, y; t_0, x_0, \mu) = f(s+t_0, y+x_0; \mu)$$

où les paramètres (t_0, x_0) apparaissent maintenant
dans le membre de droite de l'équation, et non
pas dans les conditions initiales. Nous sommes
ainsi ramené au cas précédent et le résultat
découle du théorème 4.1 par des observations
élémentaires. #

Exemple 4.1 : Considérons le problème de Cauchy

$$(4.3[\mu]) \quad x' = \cos t + \bar{e}^{-(\mu x)^2}, \quad x(\mu) = 0 \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Puisque $t \mapsto \cos t$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on montre comme à l'exemple 3.2 que (4.3[μ]) possède une unique solution globale $x(t; \mu)$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Pour $\mu \neq 0$, cette solution ne peut être calculée explicitement. En revanche, par le thm 4.2, on a que

"exercice pour vous"

EPV:
vérifier
ceci!

$x(t; \mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} x(t; 0)$ uniformément pour t dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$, où $x(t; 0) = \sin t + t$ est la solution de (4.3[0]). Ainsi, pour $|\mu| \ll 1$, $x(t; \mu)$ peut être approximée par $x(t; 0)$ sur les compacts.

Finalement on donne (sans démonstration) un résultat qui assure la différentiabilité de la solution de (PC) par rapport aux paramètres.

Théorème 4.3 : Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ t.q. $\partial_x f \in C^0(D, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\partial_\mu f \in C^0(D, \mathbb{R}^{n \times k})$. Alors (PC $[t_0, x_0, \mu]$) possède une unique solution $x = x(t; t_0, x_0, \mu)$ qui est C^1 p.r. à t_0, x_0, μ sur son domaine de définition. De plus, posant

$$\gamma(t; t_0, x_0, \mu) := \partial_x f(t, x(t; t_0, x_0, \mu); \mu),$$

on a les résultats suivants : (on dérive l'équation et la condition initiale p.r. aux paramètres)

(a) $\partial_\mu x(t; t_0, x_0, \mu)$ est la solution de

$$z' = \gamma(t; t_0, x_0, \mu) z + \partial_\mu f(t, x(t; t_0, x_0, \mu); \mu), \quad z(t_0) = 0;$$

(b) $\partial_{x_0} x(t; t_0, x_0, \mu)$ est la solution de

$$z' = \gamma(t; t_0, x_0, \mu) z, \quad z(t_0) = I;$$

(c) $\partial_{t_0} x(t; t_0, x_0, \mu)$ est la solution de

$$z' = \gamma(t; t_0, x_0, \mu) z, \quad z(t_0) = -f(t_0, x_0; \mu).$$

Formellement, pour (c) :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} [x' = f(t, x; \mu)] : (\partial_{t_0} x)' = \partial_x f(t, x; \mu) \partial_{t_0} x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} [x(t_0) = x_0] : \frac{\partial}{\partial t_0} (x(t_0; t_0, x_0, \mu)) &= 0 \Leftrightarrow \partial_{t_0} x(t_0) + x'(t_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial_{t_0} x(t_0) = -f(t_0, x_0; \mu) \end{aligned}$$

solution
EPV =

$x(t; \mu)$ continue en $(t; \mu)$ sur $\mathbb{R}^2$

En particulier, pour $\varepsilon > 0$ donné $\exists \delta > 0$

t.q. $|t; \mu) - (t; 0)| < \delta \Rightarrow |x(t; \mu) - x(t; 0)| < \varepsilon$

i.e. $|\mu| < \delta \Rightarrow |x(t; \mu) - x(t; 0)| < \varepsilon$

Si $t \in K$ compact, alors δ peut être choisi
indép. de t pour $t \in K$.